ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE
Estratto dai *Rendiconti*, Classe di Scienze — Vol. LXXXIV — 1951.

LE CONDIZIONI PERCHÈ DUE CURVE GOBBE SIANO OMOLOGICHE RISPETTO AD UN CENTRO ASSEGNATO

Nota del dott. CARLO FELICE MANARA

ULRICO HOEPLI
Libraio dell' Istituto Lombardo di Scienze e Lettere

MILANO
1951

LE CONDIZIONI PERCHÈ DUE CURVE GOBBE SIANO OMOLOGICHE RISPETTO AD UN CENTRO ASSEGNATO

Nota del dott. Carlo Felice Manara

Presentata dal M. E. prof. O. Chisini

(Adunanza dell'11 gennaio 1951)

Sunto. — Si considerano due curve algebriche gobbe irriducibili γ e γ', giacenti in uno stesso cono di vertice O e passanti ν volte per O stesso. Ogni coppia di rami di γ e γ' per O (aventi la stessa tangente e lo stesso piano osculatore) dà luogo ad un invariante differenziale proiettivo. Si dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinchè γ e γ' siano omologiche rispetto al centro O è che tali invarianti differenziali siano tutti uguali tra loro ed anche uguali a certi invarianti finiti che si costruiscono in base ai segmenti secati da γ e γ' su ciascuna corda comune per O.

§ 1. - Scopo della presente Nota è la risoluzione del problema di determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè due curve gobbe algebriche irriducibili siano trasformate l'una nell'altra da una omologia avente un centro assegnato O.

Il problema ci si è presentato, sotto forma apparentemente più generale, ma sostanzialmente equivalente, nel corso di altre ricerche ed ha importanza in relazione ad esse; tuttavia ci sembra che il suo risultato abbia interesse anche per sè stesso e quindi lo presentiamo libero da elementi che gli sono estranei. Notiamo inoltre il fatto che, per la soluzione, sono confluite considerazioni appartenenti ai due campi della geometria proiettiva differenziale e della geometria algebrica.

§ 2. - Siano dunque γ e γ' due curve gobbe algebriche irriducibili che hanno lo stesso ordine N e sono proiettate da un centro O secondo lo stesso cono Γ.

Diciamo $\tau_1\ \tau_2 \dots \tau_\nu$ i rami con cui γ passa per O; rami che supporremo in tutta questa trattazione essenzialmente lineari e regolari, cioè a contatto bipunto con le relative tangenti. Siano

$t_1, t_2 \dots t_\nu$ tali rette, rispettivamente tangenti a $\tau_1, \tau_2 \dots \tau_\nu$ in O, e $\pi_1, \dots \pi_\nu$ rispettivamente i piani osculatori. Poniamo che ad ogni ramo τ_i di γ corrisponda un ramo τ' di γ' avente la stessa tangente τ_i; allora in seguito alla ipotesi da noi fatta sulla unicità del cono proiettante Γ, è chiaro che i due rami τ_i e τ'_i avranno lo stesso piano osculatore che risulta toccare Γ lungo la generatrice t_i.

Parimenti diciamo $d_1, d_2 \dots d_\delta$ le corde proprie di γ per O, cioè le rette che si appoggiano a γ fuori di O in due punti e che corrispondono a generatrici doppie di Γ; anche qui è chiaro che le rette $d_1, d_2 \dots d_\delta$ sono pure corde di γ'.

Per semplicità supporremo che si presenti qui il caso generale, cioè che le rette t_i e d_j siano tutte distinte, e che inoltre le d_j siano generatrici di Γ a carattere nodale: tale ipotesi semplificativa non implica nessuna restrizione per la generalità delle nostre conclusioni giacchè i casi da noi esclusi (che cioè le rette t_i e d_j non siano distinte o che qualche d_j sia a carattere cuspidale) si lasciano trattare senza difficoltà alcuna come casi limiti di quello che consideriamo.

Assumiamo ora il punto O coincidente col punto Z_∞ improprio dell'asse z di un sistema di coordinate cartesiane x, y, z e consideriamo la curva f il cui ordine indicheremo con n (¹), sezione del cono Γ col piano $z = 0$. È chiaro che f possiederà certi δ nodi $D_1 \dots D_\delta$ che sono le traccie delle rette $d_1 \dots d_\delta$ sul piano $z = 0$ e certi ν punti $T_1 \dots T_\nu$ (il cui gruppo indicheremo semplicemente come gruppo T) che sono le traccie delle rette t_i.

Come è noto, i gruppi di punti sezioni di γ con i piani dello spazio sono proiettati da O in gruppi G di f appartenenti ad una serie g^3_N la quale, per staccamento del gruppo neutro T, dà la g^2_n delle sezioni rettilinee di f, proiezioni dei gruppi di γ secati dai piani della stella avente centro in O.

Analogamente i gruppi di punti sezioni di γ' con i piani dello spazio sono proiettati in gruppi G' di f appartenenti ad una g'^3_N la quale, per staccamento del gruppo neutro T, dà la stessa g^2_n delle sezioni rettilinee di f.

Sia ora ψ una curva aggiunta ad f, passante per il gruppo T e di ordine opportunamente alto, tale che essa possa essere scelta in modo che non sia tangente ad f in nessuno dei punti T, nè ad alcuno dei rami di f nei punti doppi di questa. Diciamo m l'ordine di ψ e sia M il gruppo che essa seca su f fuori di T;

(¹) Qui e nel seguito indicheremo con la stessa lettera una curva piana ed il polinomio che, uguagliato a zero, ne dà la equazione. Tale polinomio, come è chiaro, é definito a meno di un fattore costante.

siano poi φ_{m+1} e φ'_{m+1} due curve di ordine $m+1$, aggiunte ad f, passanti per M e secanti su f, fuori di M due gruppi, G e G′ rispettivamente, immagini dei gruppi secati su γ e γ' dal piano $z=0$.

Allora la g^3_N dei gruppi G può ritenersi secata su f dalle curve del sistema lineare triplamente infinito:

$$\varphi_{m+1} + (ax + by + c) \, . \, \psi_m = 0$$

e rispettivamente la g'^3_N dei gruppi G′ dalle curve del sistema analogo:

$$\varphi'_{m+1} + (ax + by + c) \, . \, \psi_m = 0.$$

Di conseguenza la γ ammetterà la rappresentazione monoidale:

$$f=0\,; \qquad z = \eta(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$$

e la γ' la rappresentazione analoga:

$$f=0\,; \qquad z = \eta'(x, y) = \frac{\varphi'(x, y)}{\psi(x, y)} \, .$$

§ 3. - Ricordiamo ora che, come è noto [1], le proiezioni di due rami gobbi regolari aventi la stessa origine, la stessa tangente e lo stesso piano osculatore, eseguite da un punto generico sopra un piano generico, hanno un invariante J di Mehmke-Segre che *non* dipende dal punto scelto come centro di proiezione nè dal piano su cui si proietta. Esso costituisce pertanto un invariante proiettivo differenziale della coppia dei rami.

Ora per quanto riguarda le nostre curve γ e γ' abbiamo già osservato che ad ogni ramo τ_i di γ per O corrisponde un ramo τ'_i di γ' avente la stessa tangente t_i e lo stesso piano osculatore; nelle rappresentazioni monoidali delle curve γ e γ' che abbiamo dato nel precedente paragrafo essi corrispondono ad uno stesso punto T_i di f che è polo di primo ordine tanto per la funzione η che per la funzione η'. Il legame tra il comportamento relativo delle funzioni η ed η' in un punto T_i e l'invariante J dei due rami corrispondenti è precisato dal seguente:

Lemma: In ogni punto T_i il rapporto delle parti principali delle funzioni η ed η', considerate come funzioni dei punti di f, vale l'invariante J dei corrispondenti rami di γ e γ'.

(1) Cfr. Fubini e Cech, *Geometria projettiva differenziale*. Tomo II, Appendice II (di E. Bompiani). II, 1.

La dimostrazione si riduce ad una semplice verifica analitica. Infatti è sempre possibile assumere T_1 nell'origine delle coordinate x, y e scegliere le unità di misura sui due assi in modo che la funzione algebrica $y(x)$ definita dalla equazione:

$$f(x, y) = 0$$

ammetta, per x abbastanza piccolo, lo sviluppo:

$$y = x^2 + \dots$$

La equazione di ψ assumerà la forma:

$$\psi \equiv \{m x + n y + \dots = 0\}$$

(essendo i termini tralasciati di grado superiore al primo in x, y) ed analogamente si avrà:

$$\begin{cases} \varphi \equiv \{\alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \dots = 0\} \\ \varphi' \equiv \{\alpha' + \alpha'_1 x + \alpha'_2 y + \dots = 0\} \end{cases}$$

Quindi nell'intorno di $x = 0$ le funzioni η ed η' dei punti della f potranno essere sviluppate secondo le potenze di x nella forma:

$$\eta = \frac{\alpha}{m x} + \vartheta(x) \qquad \eta' = \frac{\alpha'}{m x} + \vartheta'(x)$$

essendo ϑ e ϑ' funzioni regolari. Pertanto il rapporto delle parti principali vale:

$$\lim_{x \to 0} \eta'/\eta = \alpha'/\alpha$$

Operiamo ora la seguente trasformazione proiettiva, che porta il punto O nella origine degli assi:

$$X = x/z \qquad Y = y/z \qquad Z = 1/z.$$

Allora il ramo τ di y che ci interessa sarà rappresentato nelle nuove coordinate X, Y, Z da:

$$\begin{cases} X = \dfrac{m}{\alpha} x^2 + \dots \\[2ex] Y = \dfrac{m}{\alpha} x^3 + \dots \\[2ex] Z = \dfrac{m}{\alpha} x + \dots \end{cases}$$

ed analogamente il ramo τ' di γ' da:

$$\begin{cases} X = \dfrac{m}{\alpha'} x^2 + \dots \\[2ex] Y = \dfrac{m}{\alpha'} x^3 + \dots \\[2ex] Z = \dfrac{m}{\alpha'} x + \dots \end{cases}$$

Manifestamente per la trasformazione l'invariante J non cambia; e risulta facile calcolarlo su questi ultimi rami, per es. considerando la loro proiezione dal punto improprio dell'asse delle Y sul piano osculatore $Y = 0$; esso vale, come vuole la tesi $J = \alpha'/\alpha$.

§ 4. - Consideriamo ora una corda d_j per O comune a γ e γ', e diciamo A_j e B_j i punti secati su di essa da γ fuori di O, ed A'_j e B'_j quelli secati da γ'; precisamente chiamiamo A'_j il punto di γ' in cui la tangente è complanare con quella di γ in A_j e B'_j quello in cui la tangente è complanare con quella di γ e B_j.

È facile verificare che i cinque punti allineati O, A_j, B_j, A'_j, B'_j dànno luogo ad una espressione invariante proiettiva:

$$h_j = \frac{O A_j \,.\, O B_j \,.\, A'_j B'_j}{O A'_j \,.\, O B'_j \,.\, A_j B_j}$$

il cui significato è quello dell'invariante dalla proiettività definita su d_j dalle due terne $O A_j B_j$, $O A'_j B'_j$.

È ora facile stabilire la validità della seguente:

Osservazione: Data la particolare posizione da noi scelta per il punto O, ogni invariante h_j si riduce a:

$$h_j = \frac{A'_j B'_j}{A_j B_j}$$

cioè al rapporto dei segmenti finiti intercettati su ogni corda d_j dalle curve γ e γ'.

Pertanto si può calcolare analiticamente un invariante h_j nella rappresentazione monoidale da noi data; invero, detto $\overline{\eta}_{j1}$ il limite dei valori della funzione η calcolata per un punto P di f quando P tende a D_j su uno dei rami di f per D_j stesso, ed $\overline{\eta}_{j2}$ il limite analogo per l'altro ramo, ed $\overline{\eta'}_{j1}$, $\overline{\eta'}_{j2}$ i limiti analoghi per la funzione η', si ha:

$$h_j = \frac{\overline{\eta'}_{j2} - \overline{\eta'}_{j1}}{\overline{\eta}_{j2} - \overline{\eta}_{j1}} \,. \qquad (1)$$

Siamo ora in grado di concludere la nostra ricerca dimostrando il seguente:

Teorema: Affinchè due curve γ e γ', proiettate da un centro O secondo uno stesso cono e tali che ogni ramo di γ per O è ivi tangente ad uno di γ', siano trasformate l'una nell'altra da una omologia ω avente centro in O è necessario e sufficiente che gli invarianti differenziali J definiti dalle coppie di rami di γ e γ' per O e gli invarianti h_j definiti dalle intersezioni di γ e γ' con le corde comuni per O abbiano tutti uno stesso valore k. Tale valore risulta essere l'invariante della omologia ω.

In base al Lemma ed alla osservazione fatta in questo paragrafo, la dimostrazione potrà essere ottenuta sfruttando la particolare rappresentazione da noi fatta delle curve γ e γ' con la sicurezza che le conclusioni avranno valore non solo nel campo metrico, ma anche nel campo proiettivo.

La dimostrazione della necessità della condizione si riduce ad una verifica analitica. Invero nel sistema di riferimento da noi scelto, una omologia di centro O ed invariante k è data dalle equazioni:

$$\omega \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = kz + \lambda x + \mu y + \nu \end{cases}$$

Pertanto se la γ è rappresentata su f da una funzione razionale;

$$z = \eta(x, y) = \varphi/\psi$$

la γ' sarà rappresentata dalla funzione:

$$z = \eta'(x, y) = k\varphi/\psi + \lambda x + \mu y + \nu$$

Di qui segue subito che le parti principali di η e η' nei punti T_i hanno rapporto k e che le espressioni (I) calcolate in ogni nodo di f valgono pure k.

Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente; in base a quanto è stato detto nel paragrafo 2 le nostre curve saranno rappresentate da due funzioni razionali su f:

$$z = \eta(x, y) = \varphi/\psi$$

$$z = \eta'(x, y) = \varphi'/\psi.$$

Ora per quanto riguarda i punti T le nostre ipotesi, per il Lemma, implicano che in ognuno di essi la funzione:

$$H = \eta' - k\eta = \frac{\varphi' - k\varphi}{\psi}$$

ha valore finito. Pertanto la curva:

$$\Phi = \varphi' - k\varphi$$

passa per ogni punto T.

Per quanta riguarda poi i punti D la ipotesi che l'espressione

$$h_j = \frac{\overline{\eta'}_{j2} - \overline{\eta'}_{j1}}{\overline{\eta}_{j2} - \overline{\eta}_{j1}}$$

abbia in ogni punto D il valore k, implica che la curva Φ è, in ognuno di questi punti, tangente alla ψ. Infatti poniamo che la origine delle coordinate x, y sia un punto D e supponiamo di aver scelto gli assi in modo che la equazione di ψ si possa scrivere:

$$\psi \equiv \{y + \ldots = 0\}$$

essendo i termini tralasciati di grado maggiore di uno in x, y.

Le curve φ e φ' avranno allora equazioni del tipo:

$$\varphi \equiv \{a x + b y + \ldots = 0\}$$
$$\varphi' \equiv \{a' x + b' y + \ldots = 0\}.$$

essendo anche qui i termini trascurati di grado maggiore di uno. Allora i due rami di f per D si potranno rappresentare in serie per x abbastanza piccolo nelle forme:

$$y = m_1 x + \ldots; \qquad y = m_2 x + \ldots$$

Pertanto si ha:

$$\left\{\begin{aligned} \overline{\eta}_1 &= \frac{a + b m_1}{m_1}; & \overline{\eta}_2 &= \frac{a + b m_2}{m_2} \\ \overline{\eta'}_1 &= \frac{a' + b' m_1}{m_1}; & \overline{\eta'}_2 &= \frac{a' + b' m_2}{m_2} \end{aligned}\right.$$

e di conseguenza:

$$(\overline{\eta'}_2 - \overline{\eta'}_1)/(\overline{\eta}_2 - \overline{\eta}_1) = a'/a$$

da cui segue la nostra affermazione, giacchè nelle nostre ipotesi è:

$$\varphi' - k\varphi = y(b_1 - kb) + \ldots = 0,$$

Le conclusioni della analisi ora svolta possono essere esposte in altre parole dicendo che la curva Φ passa per tutti i punti comuni alle curve ψ ed f, essendo inoltre tangente a ψ nei punti doppi di f. Tanto basta per poter concludere che alla Φ è applicabile il noto teorema di Nöther (detto dell'$\mathrm{A}f + \mathrm{B}\varphi$) e che si può scrivere:

$$\Phi = (\lambda x + \mu y + \nu)\,\psi + f\sigma$$

essendo σ una opportuna curva di ordine $m + 1 - n$.

Ne segue che, *per i punti in cui è* f $= 0$ si ha:

$$\frac{\varphi'}{\psi} = \frac{k\,\varphi}{\psi} + \lambda x + \mu y + \nu$$

e quindi γ' può ritenersi trasformata di γ mediante la omologia di equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x \\ z' = kz + \lambda x + \mu y + \nu. \end{cases}$$